Hoch-, Tief-, Sattel- und Wendepunkte

1 Merkhilfe

Um sich den Zusammenhang zwischen einer Funktion $f(x)$ und ihrer Ableitungen $f'(x)$, $f''(x)$ zu merken, kann

$$\begin{array}{rl} f(x) & \text{NEW} \\ f'(x) & \quad\text{NEW} \\ f''(x) & \qquad\text{NEW} \end{array}$$

verwendet werden, wobei N für Nullstelle, E für Extremstelle und W für Wendestelle steht. D.h. hat die erste Ableitung $f'(x)$ eine Nullstelle (N), so besitzt die normale Funktion $f(x)$ dort eine Extremstelle (E) [oder einen Sattelpunkt], usw.

2 Mit Hilfe der Ableitung

2.1 Extrempunkte/Sattelpunkte

Berechnung von Hoch-/Tief- (= Extrempunkten) und Sattelpunkten:
Setze 1. Ableitung gleich 0 (da dort die Steigung den Wert 0 besitzt)

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen für mögliche Stellen } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Überprüfung der Stellen durch Einsetzen in die 2. Ableitung

$$f''(x_1) = \ldots \quad f''(x_2) = \ldots \quad f''(\ldots) = \ldots \quad f''(x_n) = \ldots$$

Dabei werden folgende 3 Fälle unterschieden:

$$\begin{array}{rcl} f''(x_i) & > & 0 \;\Rightarrow \text{Es handelt sich um einen Tiefpunkt.} \\ f''(x_i) & < & 0 \;\Rightarrow \text{Es handelt sich um einen Hochpunkt.} \\ f''(x_i) & = & 0 \;\Rightarrow \text{Es handelt sich um einen Sattelpunkt.} \end{array}$$

(Berechnung von Extremstellen wäre hier vorbei, da Stellen = x-Werte!)
Berechnung der y-Koordinaten der Punkte $P_i(x_i/y_i)$ durch Einsetzen in die normale Funktion

$$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2 \quad f(\ldots) = \ldots \quad f(x_n) = y_n$$

Somit erhält man $P_1(x_1/y_1)$, $P_2(x_2/y_2)$, $\ldots$, $P_n(x_n/y_n)$, die oft je nach Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt auch mit H/T/SP bezeichnet werden.

2.2 Wendepunkte

Berechnung von Wendepunkten:
Setze 2. Ableitung gleich 0 (da dort die Krümmung den Wert 0 besitzt)

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow \text{nach } x \text{ auflösen für mögliche Stellen } x_1, x_2, \ldots, x_n$$

Überprüfung der Stellen durch Einsetzen in die 3. Ableitung

$$f'''(x_1) = \ldots \quad f'''(x_2) = \ldots \quad f'''(\ldots) = \ldots \quad f'''(x_n) = \ldots$$

Hier gibt es 2 verschiedene Betrachtungsweisen:

1. Wendepunkt / kein Wendepunkt:

$$\begin{aligned} f'''(x_i) &\neq 0 \Rightarrow \text{Wendepunkt} \\ f'''(x_i) &= 0 \Rightarrow \text{Kein Wendepunkt} \end{aligned}$$

2. Krümmungsänderung:

$$\begin{aligned} f'''(x_i) &> 0 \Rightarrow \text{Von Rechts- auf Linksgekrümmt} \\ f''(x_i) &< 0 \Rightarrow \text{Von Links- auf Rechtsgekrümmt} \\ f''(x_i) &= 0 \Rightarrow \text{Kein Richtungswechsel} \end{aligned}$$

(Berechnung von Wende<u>stellen</u> wäre hier vorbei, da Stellen = x-Werte!)
Berechnung der y-Koordinaten der Punkte $P_i(x_i/y_i)$ durch Einsetzen in die normale Funktion

$$f(x_1) = y_1 \quad f(x_2) = y_2 \quad f(\ldots) = \ldots \quad f(x_n) = y_n$$

Somit erhält man die Wendepunkte $W_1(x_1/y_1)$, $W_2(x_2/y_2)$, …, $W_n(x_n/y_n)$.